Notiz-Rand

Musteraufgaben Abitur 2019

Tipps ab Seite 10, Lösungen ab Seite 15

Mathematik Wahlteil Musteraufgabe 2019
Analysis A1

Aufgabe A 1.1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 6 - 2e^{-x}$. Ihr Graph ist K.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K mit den Koordinatenachsen.
Geben Sie die Gleichung der Asymptoten von K an.
Untersuchen Sie f rechnerisch auf Monotonie.
Skizzieren Sie K.
Berechnen Sie die Weite des Winkels, unter dem K die x-Achse schneidet. (6 VP)

b) Die y-Achse, die Gerade mit der Gleichung $y = 6$ und K begrenzen eine nach rechts offene Fläche.
Berechnen Sie deren Inhalt. (3 VP)

c) Der Graph K* entsteht durch Spiegelung von K an der Geraden mit der Gleichung $y = 1$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der zu K* gehörenden Funktion f^*. (2 VP)

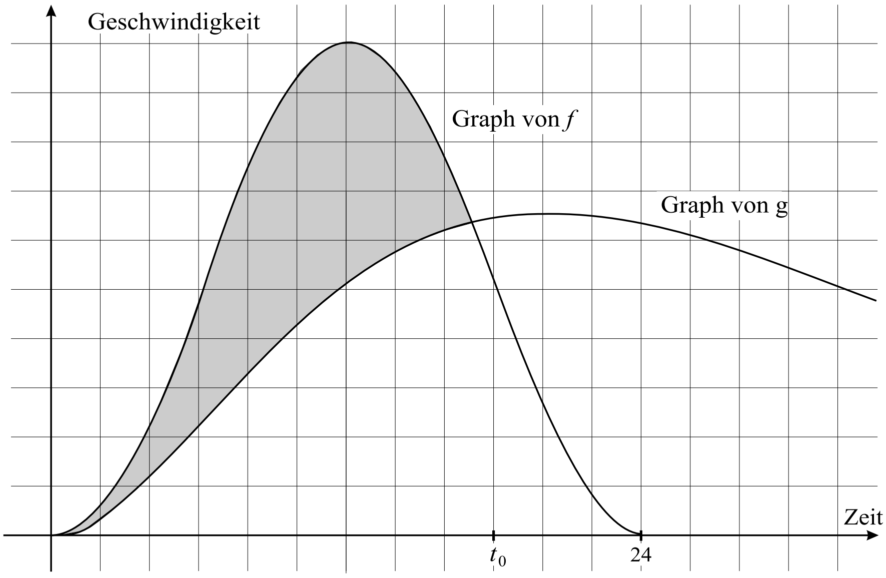
d) Eine Parabel zweiter Ordnung berührt den Graphen K im Punkt $S(0 \mid 4)$ und hat ihren Scheitel auf der Geraden mit der Gleichung $y = 5$.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Parabel. (4 VP)

Notiz-Rand

Mathematik Wahlteil Musteraufgabe 2019
Analysis A1

Aufgabe A 1.2

Die Funktionen f und g beschreiben die Geschwindigkeiten zweier Fahrzeuge F und G in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Sekunden, $f(t)$ und $g(t)$ in Meter pro Sekunde). Die Graphen von f und g sind in der Abbildung dargestellt. Die beiden Fahrzeuge starten zum Zeitpunkt $t = 0$ nebeneinander und fahren in dieselbe Richtung.



a) Beschreiben Sie die Bewegung von Fahrzeug F in den ersten 24 Sekunden nach dem Start.
Die Stelle t_0 ist eine Wendestelle des Graphen von f.
Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Stelle im Sachzusammenhang. (2 VP)

b) Deuten Sie den Inhalt der markierten Fläche im Sachzusammenhang.
Gegeben ist die Gleichung $\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{24} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die auf diese Gleichung führt. (3 VP)

Notiz-Rand

Tipps ab Seite 11, Lösungen ab Seite 19

Mathematik Wahlteil Musteraufgabe 2019
Analysis A2

Aufgabe A 2.1

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen einer Funktion f, die für $0 \leqslant t \leqslant 15$ das Volumen des Wassers in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(t)$ das Volumen in Kubikmetern.

a) Geben Sie das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn an.
Geben Sie den Zeitraum an, in dem das Volumen des Wassers mindestens 350 Kubikmeter beträgt.

Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Begründen Sie, dass die Funktionsgleichung von f weder die Form I noch die Form II hat:

$$\mathrm{I}: y = -8,5t^3 + 3,7t^2 + at + 100;\ a \in \mathbb{R}$$
$$\mathrm{II}: y = -0,3t^4 + bt^2 + 100;\ b \in \mathbb{R}$$

(5 VP)

b) Die fünfzehn Stunden nach Beobachtungsbeginn vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens bleibt bis zu dem Zeitpunkt zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man diesen Zeitpunkt grafisch bestimmen kann.

Interpretieren Sie die Gleichung $f(t+6) = f(t) - 350$ im Sachzusammenhang.
Geben Sie eine Lösung der Gleichung an.

(3,5 VP)

c) Für ein anderes Becken wird die momentane Änderungsrate des Volumens des enthaltenen Wassers für $0 \leqslant t \leqslant 15$ durch die Funktion g mit

$$g(t) = 0{,}4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)$$

beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die momentane Änderungsrate in $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$.
Die Funktion G mit

$$\mathrm{G}(t) = 0{,}2 \cdot \left(t^4 - 26t^3 + 180t^2\right)$$

ist eine Stammfunktion von g.

Berechnen Sie für den beschriebenen Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist.

Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt.

(4,5 VP)

d) Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn sind im Becken 350 Kubikmeter Wasser enthalten.
Bestimmen Sie das Volumen des Wassers zu Beobachtungsbeginn.

Untersuchen Sie rechnerisch, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

(4,5 VP)

Aufgabe A 2.2

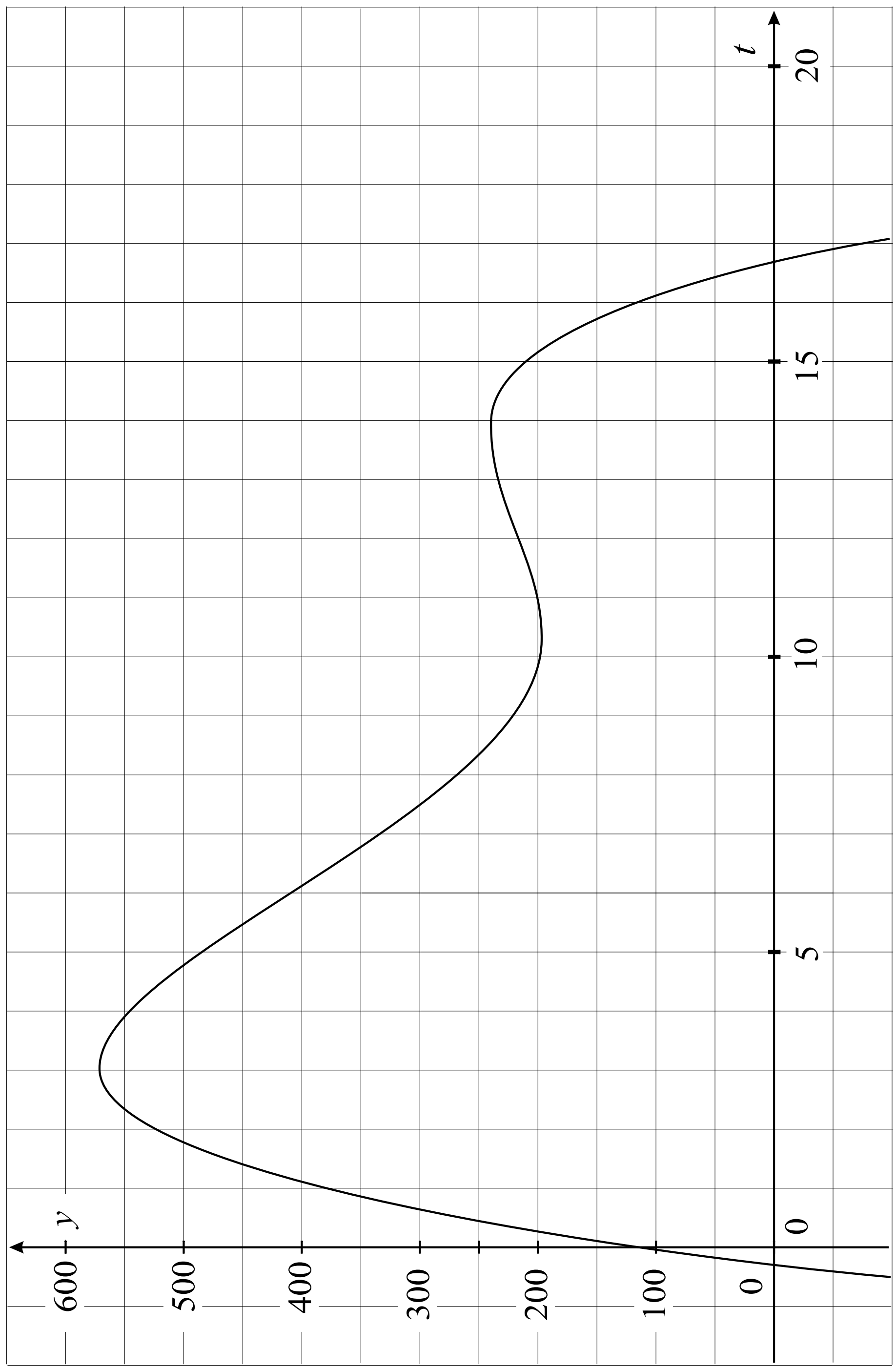
Für jedes $c > 0$ ist eine Funktion h_c mit $h_c(x) = c \cdot \sin(cx)$ gegeben.

Eine Nullstelle von h_c ist 0, die benachbarte positive Nullstelle wird mit u bezeichnet.
Geben Sie den Wert von u in Abhängigkeit von c an.
Berechnen Sie damit den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von h_c für $0 \leqslant x \leqslant u$ mit der x-Achse einschließt.

(2,5 VP)

Notiz-Rand

Abbildung zu Aufgabe A2.1



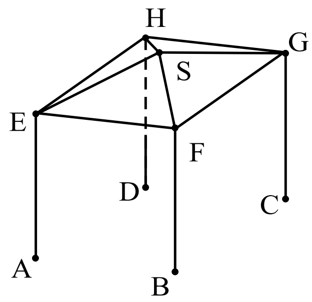
Notiz-Rand

Tipps ab Seite 12, Lösungen ab Seite 24

Mathematik Wahlteil Musteraufgabe 2019
Analytische Geometrie B1

Ein Turm auf einem Spielplatz besteht aus $4{,}50\,\text{m}$ langen, vertikal stehenden Pfosten, vier horizontalen Balken und einem Dach in Form einer geraden Pyramide. Die Abbildung zeigt den Turm schematisch. Die Dicke der Bauteile des Turms soll vernachlässigt werden.

In einem kartesischen Koordinatensystem können die Enden der Pfosten modellhaft durch die Punkte $A\,(2\mid-3\mid-0{,}5)$, B, C und $D\,(-3\mid-2\mid-0{,}5)$ sowie $E\,(2\mid-3\mid4)$, $F\,(3\mid2\mid4)$, $G\,(-2\mid3\mid4)$ und $H\,(-3\mid-2\mid4)$ dargestellt werden, die Spitze des Dachs durch den Punkt $S(0\mid0\mid5)$. Dabei beschreibt die x_1x_2-Ebene den Untergrund; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit.



a) Weisen Sie nach, dass das Viereck EFGH ein Quadrat ist.
Die Punkte E, F und S liegen in einer Ebene L.
Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.

(4 VP)

b) An der Spitze des Dachs ist eine gerade Stange befestigt, deren oberer Endpunkt im Modell durch einen Punkt T dargestellt wird. Auf den Turm treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ beschreiben. Der Schatten der Stange liegt vollständig auf der Dachfläche, die durch das Dreieck EFS beschrieben wird.
Beschreiben Sie, wie man die Länge dieses Schattens berechnen kann, wenn die Koordinaten von T und $\vec{v}$ bekannt sind.

(2 VP)

c) Zur Stabilisierung des Turms wurden zusätzliche Balken mit einer Länge von $2{,}10\,\text{m}$ verwendet. Ein solcher Balken ist mit einem Ende in einer Höhe von $3{,}50\,\text{m}$ über dem Untergrund an einem der vertikal stehenden Pfosten befestigt, mit dem anderen Ende an einem der beiden darauf liegenden horizontalen Balken. Der obere Befestigungspunkt teilt den horizontalen Balken in zwei Abschnitte.
Berechnen Sie das Verhältnis der Längen dieser beiden Abschnitte.

(2,5 VP)

d) Es soll eine vertikale Kletterstange aufgestellt werden, deren Fußpunkt im Modell durch einen Punkt P der x_1x_2-Ebene beschrieben wird. Die Kletterstange soll von dem Pfosten, der durch die Strecke AE dargestellt wird, doppelt so weit entfernt sein wie von dem Pfosten, der durch die Strecke BF dargestellt wird.
Bestimmen Sie für zwei mögliche Positionen der Kletterstange jeweils die Koordinaten von P.

(1,5 VP)

Notiz-Rand

Tipps ab Seite 12, Lösungen ab Seite 28

Mathematik Wahlteil Musteraufgabe 2019
Analytische Geometrie B2

Gegeben sind die Punkte A $(6 \mid 1 \mid 0)$, B $(4 \mid 5 \mid -4)$ und C $(-2 \mid 8 \mid 2)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC bei B einen rechten Winkel besitzt.
Die drei Punkte liegen in einer Ebene E.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Es gibt einen Punkt D, für den das Viereck ABCD ein Rechteck ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten von D.
Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieses Rechtecks 54 FE beträgt.
(Teilergebnis: E: $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$)

(5 VP)

b) Es gibt Pyramiden mit der Grundfläche ABCD, die das Volumen 108 VE haben.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze einer solchen Pyramide.

(2,5 VP)

c) Ein Teil des Rechtecks ABCD befindet sich unterhalb der x_1x_2-Ebene.
Bestimmen Sie den Inhalt dieser Teilfläche.

(2,5 VP)

Notiz-Rand

Tipps ab Seite 13, Lösungen ab Seite 32

Mathematik Wahlteil Musteraufgabe 2019
Stochastik C1

Die Firmen A und B stellen Lampen her und liefern diese anschließend an Händler aus. Der Anteil defekter Lampen unter ausgelieferten Lampen der Firma A beträgt im Mittel 9%, unter ausgelieferten Lampen der Firma B im Mittel 7%. Im Folgenden soll sowohl für die Lampen der Firma A als auch für die Lampen der Firma B angenommen werden, dass diese unabhängig voneinander Defekte aufweisen.

a) Betrachtet werden Lampen, die von der Firma A ausgeliefert wurden.
Zehn Lampen werden zufällig ausgewählt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens sechs Lampen nicht defekt sind.
500 Lampen werden zufällig ausgewählt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der defekten Lampen vom Erwartungswert der Anzahl der defekten Lampen um höchstens 10 % abweicht.

(3 VP)

b) Einem Händler werden Lampen geliefert, die in Kartons verpackt sind; jeder Karton enthält 30 Lampen. Der Händler wählt aus jedem Karton zwei Lampen zufällig aus und prüft diese. Sind bei einem Karton die beiden ausgewählten Lampen nicht defekt, so nimmt er diesen Karton an, ansonsten nicht.
Ein Karton enthält sechs defekte Lampen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler diesen Karton annimmt.
Ermitteln Sie, wie groß die Anzal der defekten Lampen in einem Karton höchstens sein darf, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler diesen Karton annimmt, mindestens 50% beträgt.

(3,5 VP)

c) Ein Discounter bezieht 35% der von ihm angebotenen Lampen von der Firma A und 65% von der Firma B. Der Einkaufspreis beträgt 0,98 Euro für eine Lampe der Firma A und 1,02 Euro für eine Lampe der Firma B. Im Zusammenhang mit dem Einkauf findet keine Prüfung der Lampen statt. Für Kunden des Discounters sind die Lampen der beiden Firmen nicht unterscheidbar; der Verkaufspreis beträgt unabhängig vom Hersteller 1,49 Euro. Jede von einem Kunden ausgewählte Lampe wird an der Kasse geprüft:
Ist eine Lampe defekt, so wird sie entsorgt.
Bestimmen Sie den im Mittel pro Lampe zu erwartenden Gewinn des Discounters.

(3,5 VP)

Notiz-Rand

Tipps ab Seite 14, Lösungen ab Seite 34

Mathematik Wahlteil Musteraufgabe 2019
Stochastik C2

Die Tabelle zeigt die prozentualen Anteile von Haushalten unterschiedlicher Größe an der Gesamtzahl der Haushalte im Jahr 2013 in Deutschland.

1-Personen-Haushalte	40,5%
2-Personen-Haushalte	34,5%
3-Personen-Haushalte	12,5%
4-Personen-Haushalte	9,2%
Haushalte mit mindestens 5 Personen	3,3%

a) Für eine Umfrage im Jahr 2013 sollten 100 Haushalte zufällig ausgewählt werden.
Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: «Es wurden genau vierzig 1-Personen-Haushalte ausgewählt.»
B: «Mindestens die Hälfte der ausgewählten Haushalte waren Mehrpersonenhaushalte.»
C: «Unter den ersten zehn ausgewählten Haushalten war kein 4-Personen-Haushalt und unter den restlichen neunzig Haushalten waren höchstens fünf 4-Personen-Haushalte.»

(3,5 VP)

b) Ermitteln Sie, wie viele Haushalte man im Jahr 2013 mindestens hätte zufällig auswählen müssen, damit darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mehr als zwanzig 2-Personen-Haushalte sind.

(2 VP)

c) Im Jahr 2013 lebten in Deutschland insgesamt etwa 80 Millionen Menschen.
Bestimmen Sie für das Jahr 2013 einen Näherungswert für die Gesamtzahl der Haushalte in Deutschland und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

(2 VP)

d) Im Jahr 2014 wurde vermutet, dass der tatsächliche Anteil der 1-Personen-Haushalte größer als im Jahr 2013 ist. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob diese Vermutung zutrifft, sollte auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Haushalten und einem Signifikanzniveau von 5% die Nullhypothese
H_0: «Der tatsächliche Anteil der 1-Personen-Haushalte beträgt höchstens 40,5%.»
getestet werden.
Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

(2,5 VP)

Tipps Wahlteil Abitur 2019

Analysis A1

Aufgabe A 1.1

a) Die Koordinaten des Schnittpunkts S von K mit der y-Achse erhalten Sie, indem Sie $x = 0$ in $f(x)$ einsetzen. Die Koordinaten des Schnittpunkts N von K mit der x-Achse erhalten Sie, indem Sie die Gleichung $f(x) = 0$ durch Logarithmieren nach x auflösen.
Beachten Sie, dass e^{-x} für $x \to \infty$ gegen Null geht und bestimmen Sie dadurch die waagrechte Asymptote.
Um das Monotonieverhalten von f zu untersuchen, betrachten Sie die 1. Ableitung von f, die Sie mit der Kettenregel bestimmen. Falls $f'(x) > 0$ ist, ist f streng monoton wachsend.
Die Weite des Winkels α, unter dem K die x-Achse schneidet, erhalten Sie, indem Sie zuerst die Steigung m an der Stelle $x = -\ln(3)$ bestimmen. Dazu setzen Sie $x = -\ln(3)$ in $f'(x)$ ein. Mit Hilfe der Formel $\tan(\alpha) = m$ für den Steigungswinkel erhalten Sie α.

b) Den Inhalt der nach rechts offenen Fläche, die die y-Achse, die Gerade mit der Gleichung $y = 6$ und K begrenzen, erhalten Sie mit Hilfe eines Integrals. Dazu begrenzen Sie die Fläche zusätzlich durch die Gerade $x = z$; $z > 0$. Beachten Sie, dass die Gerade $y = 6$ oberhalb von K verläuft und verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Beachten Sie, dass e^{-z} für $z \to \infty$ gegen Null geht und bestimmen Sie damit den Inhalt der Fläche.

c) Um K an der Geraden $y = 1$ zu spiegeln, verschieben Sie zuerst K um 1 LE nach unten, spiegeln an der x-Achse und verschieben den gespiegelten Graphen anschließend wieder um 1 LE nach oben.

d) Als Ansatz für die Gleichung einer Parabel zweiter Ordnung verwenden Sie
$g(x) = ax^2 + bx + c$ mit $g'(x) = 2ax + b$. Da die Parabel den Graphen K im Punkt $S(0 \mid 4)$ berührt, haben die Graphen von f und g an der Stelle $x = 0$ einen gemeinsamen Punkt und dieselbe Steigung. Stellen Sie damit zwei Bedingungen auf und bestimmen dadurch c und b. Bestimmen Sie den Scheitel S_a dieser Parabel, indem Sie die Gleichung $g'(x) = 0$ nach x auflösen. Setzen Sie den erhaltenen x-Wert in $g(x)$ ein. Beachten Sie, dass der y-Wert des Scheitels 5 sein muss. Stellen Sie eine Gleichung auf und lösen Sie diese nach a auf.

Aufgabe A 1.2

a) Bestimmen Sie anhand des Schaubilds die Geschwindigkeit zu Beginn, wie sich die Geschwindigkeit verändert und wie groß sie nach 24 Sekunden ist. Beachten Sie, dass bei einer Wendestelle des Graphen von f die Tangentensteigung extrem (negativ) ist und überlegen Sie, was dies für das Beschleunigen oder Abbremsen bedeutet.

b) Beachten Sie, dass an der Schnittstelle t_s der Graphen von f und g die Fahrzeuge F und G die gleiche Geschwindigkeit haben, anschließend ist Fahrzeug G schneller als Fahrzeug F. Überlegen Sie, welchen Weg die Fläche zwischen dem Graphen von f und der t-Achse im Intervall $[0; t_s]$ und welchen Weg die Fläche zwischen dem Graphen von g und der t-Achse im Intervall $[0; t_s]$ beschreibt. Beachten Sie, dass die markierte Fläche die Differenz der beiden Flächen ist und überlegen Sie, welcher Weg dadurch beschrieben wird.
Überlegen Sie, welcher Weg des Fahrzeugs G durch das Integral $\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ im Intervall $[0; x]$ und welcher Weg des Fahrzeugs F durch das Integral $\int_0^{24} f(t)\,\mathrm{d}t$ im Intervall $[0; 24]$ beschrieben wird.

Notiz-Rand

Analysis A2

Aufgabe A 2.1

a) Lesen Sie anhand der Grafik den y-Wert für $t=5$ ab.
Den Zeitraum, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt, erhalten Sie, indem Sie den Graphen von f mit der Geraden $y=350$ schneiden und die Schnittstellen bestimmen.

Die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn erhalten Sie, indem Sie die Tangente im Punkt $\mathrm{P}(2 \mid f(2))$ einzeichnen und die Steigung m der Tangente bestimmen. Wählen Sie ein geschicktes Steigungsdreieck und berechnen Sie $m=\frac{\triangle y}{\triangle t}$.
Beachten Sie, dass die Funktionsgleichung der Form I dritten Grades ist und überlegen Sie, wie viele Extrempunkte der zugehörige Graph damit höchstens haben kann. Beachten Sie, dass in der Funktionsgleichung der Form II nur gerade Exponenten vorkommen und damit eine bestimmte Symmetrie des zugehörigen Graphen vorliegt.

b) Zeichnen Sie die Tangente im Punkt $\mathrm{Q}(15 \mid f(15))$ ein und schneiden Sie diese mit der t-Achse.

Beachten Sie, dass $f(t)$ die Wassermenge zu einem Zeitpunkt t und $f(t+6)$ die Wassermenge 6 Stunden später beschreibt. Lesen Sie anhand der Grafik zwei Funktionswerte ab, die sich um 350 unterscheiden, wenn sich die zugehörigen t-Werte um 6 unterscheiden.

c) Bestimmen Sie das Maximum der Funktion g mit Hilfe der 1. und 2. Ableitung von g. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung $g'(t)=0$ mit Hilfe der pq- oder abc-Formel nach t auf. Setzen Sie die erhaltenen t-Werte in $g''(t)$ ein. Falls $g''(t)<0$ handelt es sich um ein lokales Maximum. Den zugehörigen y-Wert erhalten Sie, indem Sie den t-Wert in $g(t)$ einsetzen. Zur Untersuchung auf Randmaxima für $0 \leqslant t \leqslant 15$ setzen Sie $t=0$ und $t=15$ in $g(t)$ ein. Prüfen Sie, ob ein Randwert höher ist als das lokale Maximum.

Bestimmen Sie zuerst die Zeitpunkte, zu denen das Volumen des Wassers weder zu- noch abnimmt, indem Sie die Gleichung $g(t)=0$ durch Ausklammern mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt und der pq- oder abc-Formel nach t auflösen. Um zu prüfen, in welchem Zeitraum das Volumen des Wassers abnimmt, berechnen Sie die Funktionswerte an den Stellen, die zwischen den Stellen mit $g(t)=0$ liegen, z.B. bei $t=5$, $t=10$ und $t=15$. Überlegen Sie, in welchen Intervallen die Funktionswerte negativ sind. Alternativ können Sie auch mit Hilfe einer Wertetabelle den Graphen von g zeichnen und den Bereich mit negativen Funktionswerten bestimmen.

d) Die Zunahme Z des Wasservolumens in den ersten drei Stunden erhalten Sie mit Hilfe eines Integrals, da die Zuwächse addiert werden. Verwenden Sie die angegebene Stammfunktion. Die Wassermenge zu Beginn erhalten Sie, indem Sie von der Wassermenge drei Stunden nach Beobachtungsbeginn die in den ersten drei Stunden zugeflossene Wassermenge subtrahieren.

Die Wassermenge W zum Zeitpunkt t erhalten Sie mit Hilfe eines Integrals und der Wassermenge zu Beobachtungsbeginn. Verwenden Sie die angegebene Stammfunktion. Um zu untersuchen, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn, lösen Sie die Gleichung $\mathrm{G}(t)=\mathrm{G}(0)$ mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt und der abc- bzw. pq-Formel nach t auf.

Aufgabe A 2.2

Die Nullstellen von h_c erhalten Sie, indem Sie die Gleichung $h_c(x) = 0$ nach x auflösen. Dazu substituieren Sie $cx = z$ und bestimmen die nicht-negativen Lösungen der Gleichung $\sin(z) = 0$. Anschließend resubstituieren Sie wieder, um die entsprechenden x-Werte zu erhalten. Den Inhalt A des Flächenstücks, das der Graph von h_c für $0 \leqslant x \leqslant u$ mit der x-Achse einschließt, erhalten Sie mit Hilfe eines Integrals. Die Integrationsgrenzen sind die benachbarten Nullstellen. Verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Analytische Geometrie B1

a) Um nachzuweisen, dass das Viereck EFGH ein Quadrat ist, berechnen Sie zuerst die vier Seitenlängen, indem Sie die Längen der entsprechenden Verbindungsvektoren bestimmen. Anschließend berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{EH}$. Falls das Skalarprodukt der beiden Vektoren Null ergibt, ist bei E ein rechter Winkel.
Verwenden Sie für die Parametergleichung der Ebene L, in der die Punkte E, F und S liegen, beispielsweise den Stützpunkt E und die Spannvektoren $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{ES}$. Einen Normalenvektor $\vec{n}$ von L erhalten Sie mithilfe des Kreuzprodukts (siehe Seite **??**) der Spannvektoren. Alternativ können Sie $\vec{n}$ auch mithilfe des Skalarprodukts bestimmen, da $\vec{n}$ sowohl auf $\overrightarrow{EF}$ als auch auf $\overrightarrow{ES}$ senkrecht steht. Eine Koordinatengleichung von L erhalten Sie mithilfe der Punkt-Normalenform: $(\vec{x} - \vec{e}) \cdot \vec{n} = 0$. Alternativ können Sie auch die Koordinaten eines gegebenen Punktes in den Ansatz $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ einsetzen und d bestimmen.

b) Überlegen Sie, wie Sie die Sonnenstrahlen durch eine Gerade g darstellen können und wie Sie mit Hilfe dieser Geraden und der Ebene L den Schattenpunkt Z der Spitze T erhalten. Die Länge l des Schattens (in Metern) erhalten Sie, indem Sie die Länge des Vektors von S zu Z bestimmen.

c) Zur Veranschaulichung skizzieren Sie die Problemstellung: Der Balken wird beispielsweise im Punkt $R(2 \mid -3 \mid 3,5)$ befestigt, also 0,5m unterhalb von E, und endet im Punkt Q auf der Strecke EF.
Verwenden Sie den Satz des Pythagoras, um die Länge der Strecke von E zu Q zu bestimmen. Anschließend berechnen Sie die Länge der Strecke von Q zu F, indem Sie von der Strecke EF die Strecke EQ subtrahieren. Das Verhältnis v der Längen der beiden Streckenabschnitte erhalten Sie, indem Sie die beiden Längen durcheinander teilen.

d) Zur Veranschaulichung skizzieren Sie die Problemstellung. Beachten Sie, dass es zwei Möglichkeiten gibt, wie der Punkt P liegen kann. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes A′, der 0,5m oberhalb von A auf dem Boden und die Koordinaten des Punktes B′, der 4m unterhalb von F auf dem Boden liegt. Um die Punkte P_1 und P_2 so zu bestimmen, dass sie von A′ doppelt so weit entfernt sind wie von B′, stellen Sie geeignete Vektorketten auf.

Analytische Geometrie B2

a) Um zu zeigen, dass das Dreieck ABC bei B einen rechten Winkel hat, berechnen Sie das Skalarprodukt von $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$. Falls das Ergebnis Null ergibt, gibt es einen rechten Winkel bei B.
Für eine Parametergleichung der Ebene E, in der die Punkte A, B und C liegen, verwenden Sie beispielsweise den Stützpunkt A und die Spannvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Einen Normalenvektor $\vec{n}$ von E erhalten Sie mit Hilfe des Kreuzprodukts (siehe Seite **??**) der Spannvektoren. Alternativ können Sie $\vec{n}$ auch mit Hilfe des Skalarprodukts bestimmen, da $\vec{n}$ sowohl auf $\overrightarrow{AB}$

Notiz-Rand

als auch auf $\overrightarrow{AC}$ senkrecht steht. Eine Koordinatengleichung von E erhalten Sie mit Hilfe der Punkt-Normalenform: $(\vec{x}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$. Alternativ können Sie auch die Koordinaten eines gegebenen Punktes in den Ansatz $ax_1+bx_2+cx_3=d$ einsetzen und d bestimmen.
Um die Koordinaten eines Punktes D so zu bestimmen, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist, skizzieren Sie die Problemstellung und stellen eine geeignete Vektorkette auf.
Den Flächeninhalt A des Rechtecks ABCD erhalten Sie mit der Formel $\mathrm{A}=a\cdot b$ mit $a=\left|\overrightarrow{AB}\right|$ und $b=\left|\overrightarrow{BC}\right|$.

b) Den Mittelpunkt M der senkrechten Pyramide mit der Grundfläche ABCD erhalten Sie, indem Sie den Mittelpunkt von A und C bestimmen. Bestimmen Sie die Höhe h der Pyramide mit Hilfe der Formel $\mathrm{V}=\frac{1}{3}\cdot\mathrm{G}\cdot h$.
Die Koordinaten der Spitze S einer solchen Pyramide erhalten Sie mit Hilfe einer Vektorkette mit einem auf Länge 1 normierten Normalenvektor. Beachten Sie, dass es dabei zwei Möglichkeiten gibt. Alternativ können Sie die Spitze auch senkrecht über dem Punkt A wählen.

c) Überlegen Sie, welcher Eckpunkt des Rechtecks unterhalb der x_1x_2-Ebene liegt. Stellen Sie die Gleichungen einer Geraden g durch B und C auf und berechnen Sie den Schnittpunkt F dieser Geraden mit der x_1x_2-Ebene ($x_3=0$). Diesen erhalten Sie, indem Sie die x_3-Koordinate gleich Null setzen. Beachten Sie, dass die entstandene Fläche ein rechtwinkliges Dreieck ist. Den Flächeninhalt A eines Dreiecks erhalten Sie mit Hilfe der Formel $\mathrm{A}=\frac{g\cdot h}{2}$ mit $g=\left|\overrightarrow{BF}\right|$ und $h=\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Stochastik C1

a) Legen Sie für das Ereignis E_1: «Es sind mindestens sechs Lampen nicht defekt.» X binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der nicht-defekten Lampen der Firma A mit den Parametern n und p fest. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1 erhalten Sie mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und der kumulierten Binomialverteilung.
Legen Sie für das Ereignis E_2: «Die Anzahl der defekten Lampen weicht vom Erwartungswert der Anzahl der defekten Lampen um höchstens 10 % ab.» Y als Zufallsvariable für die Anzahl der defekten Lampen der Firma A mit den Parametern n und p fest. Den Erwartungswert von Y erhalten Sie mit Hilfe der Formel: $\mathrm{E(Y)}=\mu=\mathrm{n}\cdot\mathrm{p}$. Berechnen Sie 10% von 45 und überlegen Sie, für welche Mindestanzahl und welche Höchstanzahl von Lampen die Wahrscheinlichkeit berechnet werden muss. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_2 erhalten Sie mit Hilfe der kumulierten Binomialverteilung. Beachten Sie, dass gilt: $\mathrm{P}(\mathrm{k}_1\leqslant\mathrm{X}\leqslant\mathrm{k}_2)=\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant\mathrm{k}_2)-\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant\mathrm{k}_1-1)$.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der nicht-defekten Lampen in einem Karton. Beachten Sie, dass es sich um Ziehen ohne Zurücklegen handelt, wenn der Händler zwei Lampen entnimmt und dass der Händler den Karton annimmt, wenn er bei jeder Entnahme eine nicht-defekte Lampe zieht. Die Wahrscheinlichkeit P_6 bei sechs defekten Lampen, dass der Händler den Karton annimmt, erhalten Sie mit Hilfe der Pfadregeln.
Um zu ermitteln, wie groß die Anzal der defekten Lampen in einem Karton höchstens sein darf, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler diesen Karton annimmt, mindestens 50% beträgt, bestimmen Sie entsprechend durch Ausprobieren, indem Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die Annahme des Kartons bei 7, 8, 9 defekten Lampen berechnen.

Notiz-Rand

c) Bestimmen Sie den zu erwartenden Gewinn und den zu erwartenden Verlust für eine intakte bzw. defekte Lampe der Firma und multiplizieren Sie diesen mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit. Beachten Sie, dass der Discounter 35% der von ihm angebotenen Lampen von der Firma A bezieht und berechnen Sie damit den Gewinn $E(A)$. Entsprechend verfahren Sie für Lampen der Firma B. Den im Mittel pro Lampe zu erwartenden Gewinn G des Discounters erhalten Sie, indem Sie die zu erwartenden Gewinne bei Lampen der Firmen A und B addieren.

Stochastik C2

a) Für das Ereignis A legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der 1-Personen-Haushalte mit den Parametern n und p fest. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A erhalten Sie mit Hilfe der Binomialverteilung. Für das Ereignis B legen Sie Y als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der Mehrpersonenhaushalte mit den Parametern n und p fest. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B erhalten Sie mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und der kumulierten Binomialverteilung. Beachten Sie, dass sich das Ereignis C setzt aus zwei Teilereignissen C_1: «Unter den ersten zehn ausgewählten Haushalten war kein 4-Personen-Haushalt.» und C_2: «Unter den restlichen neunzig Haushalten waren höchstens fünf 4-Personen-Haushalte.» zusammensetzt. Für das Ereignis C_1 legen Sie Z_1 als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der 4-Personen-Haushalte mit den entsprechenden Parametern fest. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C_1 erhalten Sie mit Hilfe der Binomialverteilung. Für das Ereignis C_2 legen Sie Z_2 als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der 4-Personen-Haushalte mit den entsprechenden Parametern fest. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C_2 erhalten Sie mit Hilfe der kumulierten Binomialverteilung. Beachten Sie, dass die beiden Ereignisse C_1 und C_2 unabhängig voneinander sind. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C erhalten Sie somit mit Hilfe der Pfadregeln.

b) Legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der 2-Personen-Haushalte mit den Parameten p und unbekanntem n fest. Stellen Sie eine Ungleichung auf und lösen Sie diese mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses durch Ausprobieren.

c) Legen Sie x für die Gesamtzahl der Haushalte in Deutschland fest und gehen Sie vereinfachend davon aus, dass in einem Haushalt mit mindestens 5 Personen genau 5 Personen leben. Multiplizieren Sie die gegebenen Anteile mit x und mit der jeweiligen Personenzahl pro Haushalt und addieren Sie die Ergebnisse. Stellen Sie eine Gleichung auf und lösen Sie diese nach x auf.

d) Legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der 1-Personen-Haushalte mit den Parametern p und n fest. Formulieren Sie die Nullhypothese $H_0: p \leqslant ...$ und zugehörige Alternativhypothese H_1: $p > ...$. Beachten Sie, dass es sich wegen H_1: $p > ...$ um einen rechtsseitigen Test mit Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ handelt. Bestimmen Sie durch Ausprobieren ein minimales $k \in \mathbb{N}$ und damit einen Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{k, ..., 500\}$ der Nullhypothese so, dass gilt: $P(X \in \overline{A}) \leqslant \alpha$ bzw. $P(X \geqslant k) \leqslant 0{,}05$. Verwenden Sie die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und die kumulierte Binomialverteilung. Überlegen Sie damit, wann die Nullhypothese verworfen wird.

Lösungen Musteraufgaben Abitur 2019

Analysis A1

Aufgabe A 1.1

Es ist $f(x) = 6 - 2e^{-x}$.

a) Die Koordinaten des Schnittpunkts S von K mit der y-Achse erhält man, indem man $x = 0$ in $f(x)$ einsetzt:

$$y = f(0) = 6 - 2 \cdot e^{-0} = 6 - 2 \cdot 1 = 4 \;\Rightarrow\; \mathrm{S}(0 \mid 4)$$

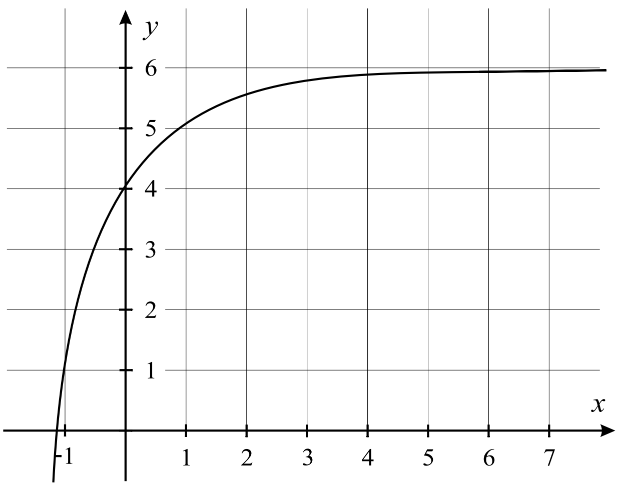
Die Koordinaten des Schnittpunkts N von K mit der x-Achse erhält man, indem man die Gleichung $f(x) = 0$ nach x auflöst:

$$\begin{aligned} 6 - 2e^{-x} &= 0 \\ 6 &= 2e^{-x} \\ 3 &= e^{-x} \\ \ln(3) &= -x \\ -\ln(3) &= x \end{aligned}$$

Somit hat der Schnittpunkt mit der x-Achse die Koordinaten $\mathrm{N}(-\ln(3) \mid 0)$.
Für $x \to \infty$ geht e^{-x} gegen Null, also geht $f(x)$ gegen 6, also ist $y = 6$ eine waagrechte Asymptote.
Um das Monotonieverhalten von f zu untersuchen, betrachtet man die 1. Ableitung von f, die man mit der Kettenregel erhält:

$$f'(x) = 0 - 2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 2 \cdot e^{-x}$$

Wegen $f'(x) = 2 \cdot e^{-x} > 0$ ist f streng monoton wachsend.



Die Weite des Winkels α, unter dem K die x-Achse schneidet, erhält man, indem man zuerst die Steigung m an der Stelle $x = -\ln(3)$ bestimmt. Dazu setzt man $x = -\ln(3)$ in $f'(x) = 2 \cdot e^{-x}$ ein:

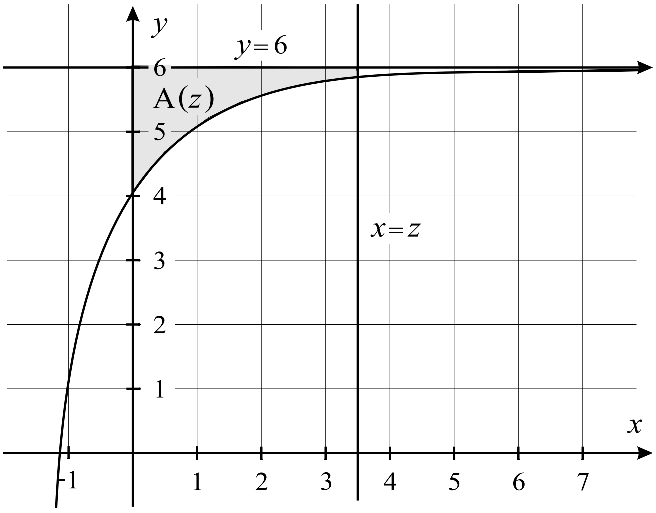
$$m = f'(-\ln(3)) = 2 \cdot e^{-(-\ln(3))} = 2 \cdot e^{\ln(3)} = 2 \cdot 3 = 6$$

Notiz-Rand

Mit Hilfe der Formel $\tan(\alpha) = m$ für den Steigungswinkel ergibt sich:

$$\tan(\alpha) = 6 \;\Rightarrow\; \alpha \approx 80,5^\circ$$

b) Den Inhalt der nach rechts offenen Fläche, die die y-Achse, die Gerade mit der Gleichung $y = 6$ und K begrenzen, erhält man mit Hilfe eines Integrals. Dazu begrenzt man die Fläche zusätzlich durch die Gerade $x = z$; $z > 0$.



Da die Gerade $y = 6$ oberhalb von K verläuft, erhält man den Flächeninhalt $A(z)$ durch folgendes Integral:

$$\begin{aligned} A(z) &= \int_0^z (6 - f(x))\,dx \\ &= \int_0^z \left(6 - \left(6 - 2e^{-x}\right)\right)\,dx \\ &= \int_0^z 2e^{-x}dx \\ &= \left[\frac{2e^{-x}}{-1}\right]_0^z \\ &= \left[-2e^{-x}\right]_0^z \\ &= -2e^{-z} - \left(-2e^{-0}\right) \\ &= -2e^{-z} + 2 \end{aligned}$$

Für $z \to \infty$ geht e^{-z} gegen Null, also geht $A(z)$ gegen 2.
Somit beträgt der Inhalt der nach rechts offenen Fläche 2 FE.

c) Um K an der Geraden $y = 1$ zu spiegeln, verschiebt man zuerst K um 1 LE nach unten, spiegelt an der x-Achse und verschiebt den gespiegelten Graphen anschließend wieder um 1 LE nach oben.
Damit erhält man für die Funktion f^* folgenden Term:

$$f^*(x) = -(f(x) - 1) + 1 = -\left(6 - 2e^{-x} - 1\right) + 1 = -6 + 2e^{-x} + 1 + 1 = 2e^{-x} - 4$$

Notiz-Rand

d) Als Ansatz für die Gleichung einer Parabel zweiter Ordnung verwendet man $g(x) = ax^2 + bx + c$ mit $g'(x) = 2ax + b$.
Da die Parabel den Graphen K im Punkt S(0 | 4) berührt, gelten die beiden Bedingungen $g(0) = f(0) = 6 - 2e^{-0} = 4$ und $g'(0) = f'(0) = 2 \cdot e^{-0} = 2$.
Aus $g(0) = 4$ erhält man: $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 4 \Rightarrow c = 4$.
Aus $g'(0) = 2$ erhält man: $2a \cdot 0 + b = 2 \Rightarrow b = 2$.
Damit gilt: $g(x) = ax^2 + 2x + 4$.
Den Scheitel S_a dieser Parabel erhält man, indem man die Gleichung $g'(x) = 0$ nach x auflöst:

$$2ax + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{a}$$

Setzt man $x = -\frac{1}{a}$ in $g(x)$ ein, erhält man:

$$g\left(-\frac{1}{a}\right) = a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) + 4 = a \cdot \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} + 4 = -\frac{1}{a} + 4 \Rightarrow S_a\left(-\frac{1}{a} \mid -\frac{1}{a} + 4\right)$$

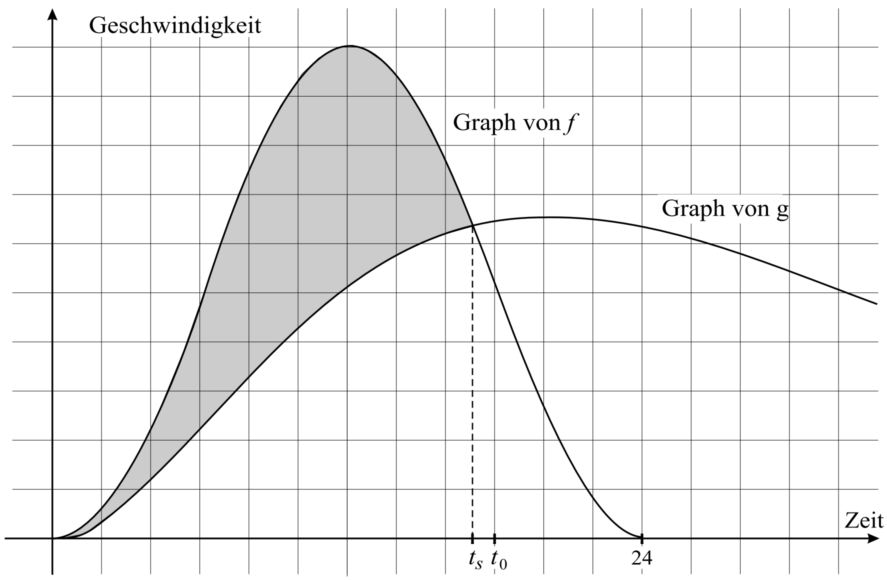
Da die Parabel ihren Scheitel auf der Geraden mit der Gleichung $y = 5$ hat, muss gelten:

$$-\frac{1}{a} + 4 = 5 \Rightarrow a = -1$$

Damit hat die gesuchte Parabel die Gleichung $g(x) = -x^2 + 2x + 4$.

Aufgabe A 1.2

Die Funktionen f und g beschreiben die Geschwindigkeiten zweier Fahrzeuge F und G in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Sekunden, $f(t)$ und $g(t)$ in Meter pro Sekunde). Die Graphen von f und g sind in der Abbildung dargestellt. Die beiden Fahrzeuge starten zum Zeitpunkt $t = 0$ nebeneinander und fahren in dieselbe Richtung.



a) Fahrzeug F hat zu Beginn die Geschwindigkeit Null, beschleunigt bis zu einer maximalen Geschwindigkeit und bremst dann wieder ab, bis es nach 24 Sekunden wieder die Geschwindigkeit Null hat, also zum Stillstand gekommen ist.

Notiz-Rand

Da t_0 eine Wendestelle des Graphen von f ist, ist an dieser Stelle die Tangentensteigung extrem negativ, d.h. im Sachzusammenhang, dass das Fahrzeug F an dieser Stelle am stärksten abbremst.

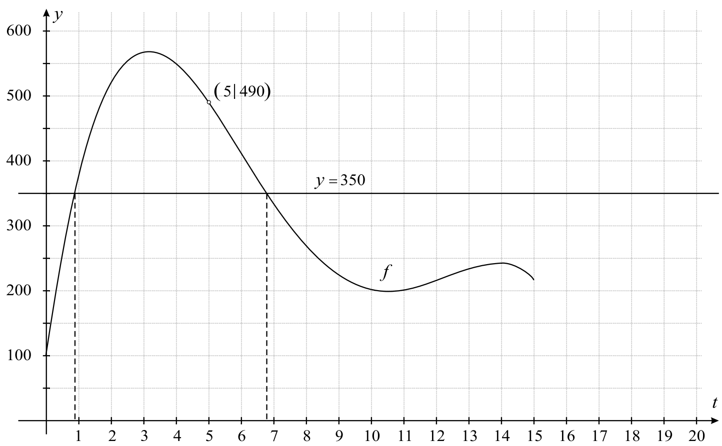
b) An der Schnittstelle t_s der Graphen von f und g haben die Fahrzeuge F und G die gleiche Geschwindigkeit, anschließend ist Fahrzeug G schneller als Fahrzeug F. Die Fläche zwischen dem Graphen von f und der t-Achse im Intervall $[0\,;t_s]$ beschreibt den Weg, den das Fahrzeug F vom Start bis zum Zeitpunkt t_s zurücklegt. Die Fläche zwischen dem Graphen von g und der t-Achse im Intervall $[0\,;t_s]$ beschreibt den Weg, den das Fahrzeug G vom Start bis zum Zeitpunkt t_s zurücklegt. Die markierte Fläche ist die Differenz der beiden Flächen, beschreibt also den maximalen Vorsprung (Weg), den Fahrzeug F gegenüber Fahrzeug G haben kann, da vor der Schnittstelle t_s das Fahrzeug F schneller ist als das Fahrzeug G und anschließend das Fahrzeug G schneller ist als Fahrzeug F.
Durch das Integral $\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ wird der zurückgelegte Weg des Fahrzeugs G im Intervall $[0\,;x]$, also vom Start bis zu einem Zeitpunkt x beschrieben.
Durch das Integral $\int_0^{24} f(t)\,\mathrm{d}t$ wird der zurückgelegte Weg des Fahrzeugs F im Intervall $[0\,;24]$, also vom Start bis zu 24 Sekunden beschrieben. Also lautet die Frage, die auf die Gleichung $\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{24} f(t)\,\mathrm{d}t$ führt: «Zu welchem Zeitpunkt hat das Fahrzeug G den gleichen Weg zurückgelegt wie das Fahrzeug F in den ersten 24 Sekunden?»

Analysis A2

Aufgabe A 2.1

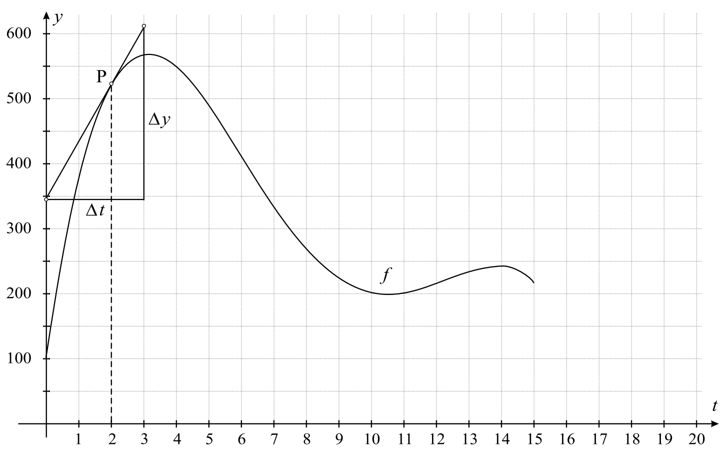
a) Das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn kann man anhand der Grafik bestimmen, indem man den y-Wert für $t = 5$ abliest: $y \approx 490$. Somit beträgt das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn etwa $490\,\text{m}^3$.

Den Zeitraum, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt, erhält man, indem man den Graphen von f mit der Geraden $y = 350$ schneidet und die Schnittstellen bestimmt:



Man kann anhand der Grafik ablesen: $t_1 \approx 0{,}9$ und $t_2 \approx 6{,}8$.
Somit beträgt das Volumen im Zeitraum von etwa 0,9 Stunden bis etwa 6,8 Stunden nach Beobachtungsbeginn mindestens 350 Kubikmeter.

Die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn erhält man, indem man die Steigung m der Tangente im Punkt $P(2 \mid f(2))$ bestimmt:



mit Hilfe eines geeigneten Steigungsdreiecks erhält man:

$$m = \frac{\triangle y}{\triangle t} \approx \frac{270}{3} = 90$$

Somit beträgt die momentane Änderungsrate etwa $90\,\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$.
Der Graph einer Funktion der Form I hat höchstens zwei Extrempunkte, da die Funktionsgleichung dritten Grades ist. Der vorliegende Graph der Funktion f hat offensichtlich

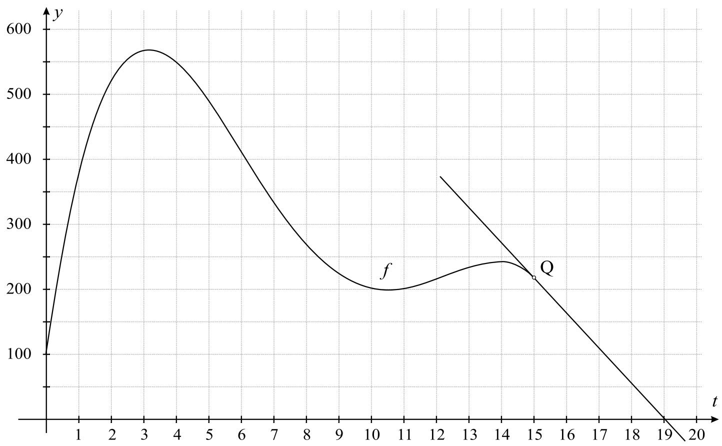
Notiz-Rand

mindestens drei Extrempunkte.

Der Graph einer Funktion der Form II ist symmetrisch zur y-Achse, da in der Funktionsgleichung nur gerade Exponenten vorkommen. Der vorliegende Graph der Funktion f ist offensichtlich nicht symmetrisch zur y-Achse, da sonst die Steigung an der Stelle $x = 0$ den Wert Null haben müsste.

Somit hat die Funktionsgleichung von f weder die Form I noch die Form II.

b) Da die vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens fünfzehn Stunden nach Beobachtungsbeginn bis zu dem Zeitpunkt erhalten bleibt, zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält, kann man im Punkt $Q(15 \mid f(15))$ die Tangente einzeichnen und diese mit der t-Achse schneiden:



Somit enthält das Becken etwa 19 Stunden nach Beobachtungsbeginn kein Wasser mehr.

Die Gleichung $f(t+6) = f(t) - 350$ gibt an, dass der Funktionswert an der Stelle $t+6$ um 350 kleiner ist als zu einem Zeitpunkt t. Dies bedeutet im Sachzusammenhang, dass man mit dieser Gleichung einen Zeitpunkt t so bestimmen kann, dass das Wasservolumen 6 Stunden nach diesem Zeitpunkt um 350 Kubikmeter kleiner ist. Anhand der Grafik kann man Folgendes ablesen: $f(4) \approx 550$ und $f(10) \approx 200$. Damit ist bei $t = 4$ das Wasservolumen um 350 Kubikmeter größer als bei $t = 10$, also 6 Stunden später.

c) Es ist $g(t) = 0{,}4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)$ die momentane Änderungsrate des Volumens des Wassers für $0 \leqslant t \leqslant 15$ (t in Stunden und $g(t)$ in $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$) und $G(t) = 0{,}2 \cdot \left(t^4 - 26t^3 + 180t^2\right)$ eine Stammfunktion von g.

Man erhält denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist, indem man das Maximum der Funktion g mit Hilfe der 1. und 2. Ableitung von g bestimmt:

$$g'(t) = 0{,}4 \cdot \left(6t^2 - 78t + 180\right)$$
$$g''(t) = 0{,}4 \cdot (12t - 78)$$

Die notwendige Bedingung $g'(t) = 0$ führt zu:

$$0{,}4 \cdot \left(6t^2 - 78t + 180\right) = 0$$
$$0{,}4 \cdot 6 \cdot \left(t^2 - 13t + 30\right) = 0$$

Mit Hilfe der pq- oder der abc-Formel erhält man die Lösungen $t_1 = 3$ und $t_2 = 10$.
Setzt man $t_1 = 3$ und $t_2 = 10$ in $g''(t)$ ein, ergibt sich:

$$g''(3) = 0,4 \cdot (12 \cdot 3 - 78) = -16,8 < 0 \text{ Maximum}$$
$$g''(10) = 0,4 \cdot (12 \cdot 10 - 78) = 16,8 > 0 \text{ Minimum}$$

Wegen $g''(3) < 0$ ist bei $t = 3$ ein lokales Maximum.
Den zugehörigen y-Wert erhält man, indem man den t-Wert in $g(t)$ einsetzt:

$$y = g(3) = 0,4 \cdot \left(2 \cdot 3^3 - 39 \cdot 3^2 + 180 \cdot 3\right) = 97,2$$

Zur Untersuchung auf Randmaxima für $0 \leqslant t \leqslant 15$ setzt man $t = 0$ und $t = 15$ in $g(t)$ ein:

$$g(0) = 0,4 \cdot \left(2 \cdot 0^3 - 39 \cdot 0^2 + 180 \cdot 0\right) = 0$$
$$g(15) = 0,4 \cdot \left(2 \cdot 15^3 - 39 \cdot 15^2 + 180 \cdot 15\right) = 270$$

Wegen $g(15) > g(3)$ ist die momentane Änderungsrate des Wasservolumens 15 Stunden nach Beobachtungsbeginn maximal.

Zuerst werden die Zeitpunkte bestimmt, an denen das Volumen des Wassers weder zu- noch abnimmt. Diese erhält man, indem man die Gleichung $g(t) = 0$ nach t auflöst:

$$0,4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right) = 0$$

Durch Ausklammern von t erhält man

$$0,4t \cdot \left(2t^2 - 39t + 180\right) = 0$$

Mithilfe des Satzes vom Nullprodukt erhält man $t_1 = 0$. Die Gleichung $2t^2 - 39t + 180 = 0$ wird mit der pq- oder abc-Formel gelöst. Man erhält die Lösungen $t_2 = 7,5$ und $t_3 = 12$.
Um zu prüfen, in welchem Zeitraum das Volumen des Wassers abnimmt, berechnet man beispielsweise die Funktionswerte an den Stellen $t = 5$, $t = 10$ und $t = 15$:

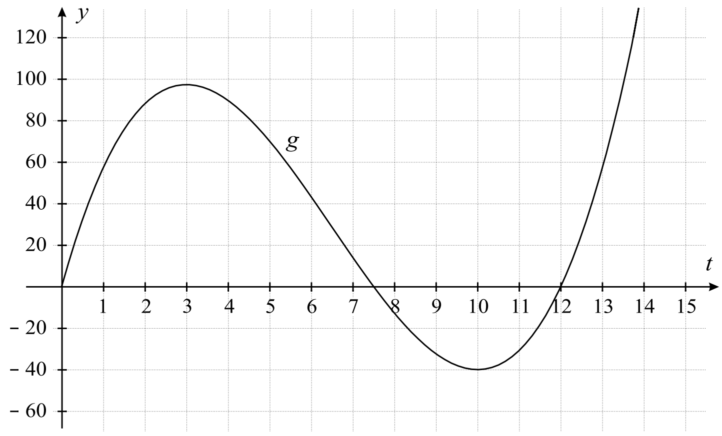
$$g(5) = 0,4 \cdot \left(2 \cdot 5^3 - 39 \cdot 5^2 + 180 \cdot 5\right) = 70$$
$$g(10) = 0,4 \cdot \left(2 \cdot 10^3 - 39 \cdot 10^2 + 180 \cdot 10\right) = -40$$
$$g(15) = 0,4 \cdot \left(2 \cdot 15^3 - 39 \cdot 15^2 + 180 \cdot 15\right) = 270$$

Damit sind die Funktionswerte von g für $7,5 < t < 12$ negativ.
Alternativ kann man mit Hilfe einer Wertetabelle auch den Graphen von g zeichnen:

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$g(t)$	0	57,2	88	97,2	89,6	70	43,2	14

t	8	9	10	11	12	13	14	15
$g(t)$	$-12,8$	$-32,4$	-40	$-30,8$	0	57,2	145,6	270

Notiz-Rand



Somit nimmt das Volumen des Wassers im Zeitraum von 7,5 bis 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn ab.

d) Die Zunahme Z des Wasservolumens in den ersten drei Stunden erhält man mit Hilfe eines Integrals, da die Zuwächse addiert werden:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z} &= \int_0^3 g(t)\mathrm{d}t \\
&= \Big[\mathrm{G}\,(t)\Big]_0^3 \\
&= \mathrm{G}\,(3) - \mathrm{G}\,(0) \\
&= 0{,}2 \cdot \left(3^4 - 26\cdot 3^3 + 180\cdot 3^2\right) - 0{,}2\cdot\left(0^4 - 26\cdot 0^3 + 180\cdot 0^2\right) \\
&= 199{,}8
\end{aligned}$$

Die Wassermenge zu Beginn erhält man, indem man von der Wassermenge drei Stunden nach Beobachtungsbeginn die zugeflossene Wassermenge subtrahiert:

$$350 - 199{,}8 = 150{,}2$$

Somit müssen zu Beobachtungsbeginn 150,2 Kubikmeter Wasser enthalten sein.

Zu Beobachtungsbeginn beträgt das Wasservolumen 150,2 Kubikmeter. Die Wassermenge W zum Zeitpunkt t erhält man mit Hilfe eines Integrals:

$$\mathrm{W} = 150{,}2 + \int_0^t g(z)\mathrm{d}z = 150{,}2 + \Big[\mathrm{G}\,(z)\Big]_0^t = 150{,}2 + \mathrm{G}(t) - \mathrm{G}(0) = 150{,}2 + \mathrm{G(t)}$$

Um zu untersuchen, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn, stellt man die folgende Gleichung auf: $150{,}2 + \mathrm{G}\,(t) = 150{,}2$. Diese kann so gelöst werden:

$$\begin{aligned}
150{,}2 + 0{,}2\cdot\left(t^4 - 26t^3 + 180t^2\right) &= 150{,}2 \\
0{,}2\cdot\left(t^4 - 26t^3 + 180t^2\right) &= 0 \\
t^4 - 26t^3 + 180t^2 &= 0 \\
t^2\cdot\left(t^2 - 26t + 180\right) &= 0
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt erhält man $t_1 = 0$. Die Gleichung $t^2 - 26t + 180 = 0$ wird mit Hilfe der pq- bzw. der abc-Formel gelöst. Allerdings besitzt sie keine Lösungen, daher ist $t = 0$ die einzige Lösung der obigen Gleichung.
Somit gibt es (nach Beobachtungsbeginn) keinen weiteren Zeitpunkt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

Aufgabe A 2.2

Für jedes $c > 0$ ist eine Funktion h_c mit $h_c(x) = c \cdot \sin(cx)$ gegeben.

Die Nullstellen von h_c erhält man, indem man die Gleichung $h_c(x) = 0$ nach x auflöst:

$$\begin{aligned} c \cdot \sin(cx) &= 0 \\ \sin(cx) &= 0 \end{aligned}$$

Substituiert man $cx = z$, so ergibt sich: $\sin(z) = 0$ mit den Lösungen $z_1 = 0$, $z_2 = \pi$, $z_3 = 2\pi$, usw..
Resubstituiert man $cx = 0$ ergibt sich $x_1 = 0$.
Resubstituiert man $cx = \pi$ ergibt sich $x_2 = \frac{\pi}{c}$.
Somit ist die zu 0 benachbarte positive Nullstelle : $u = \frac{\pi}{c}$.
Den Inhalt A des Flächenstücks, das der Graph von h_c für $0 \leqslant x \leqslant u$ mit der x-Achse einschließt, erhält man mit Hilfe eines Integrals:

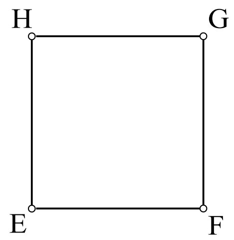
$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \int_0^{\frac{\pi}{c}} h_c(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{c}} c \cdot \sin(cx)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{c \cdot (-\cos(cx))}{c}\right]_0^{\frac{\pi}{c}} \\ &= [-\cos(cx)]_0^{\frac{\pi}{c}} \\ &= -\cos\left(c \cdot \frac{\pi}{c}\right) - (-\cos(c \cdot 0)) \\ &= -\cos(\pi) + \cos(0) \\ &= -(-1) + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt beträgt 2 FE.

Analytische Geometrie B1

Gegeben sind die Punkte A$(2 \mid -3 \mid -0,5)$, D$(-3 \mid -2 \mid -0,5)$, E$(2 \mid -3 \mid 4)$, F$(3 \mid 2 \mid 4)$, G$(-2 \mid 3 \mid 4)$, H$(-3 \mid -2 \mid 4)$ und S$(0 \mid 0 \mid 5)$.

a) Um nachzuweisen, dass das Viereck EFGH ein Quadrat ist, berechnet man zuerst die vier Seitenlängen, indem man die Längen der entsprechenden Verbindungsvektoren bestimmt:



$$\overline{EF} = \left|\overrightarrow{EF}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+5^2+0^2} = \sqrt{26}$$

$$\overline{FG} = \left|\overrightarrow{FG}\right| = \left|\begin{pmatrix}-5\\1\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-5)^2+1^2+0^2} = \sqrt{26}$$

$$\overline{GH} = \left|\overrightarrow{GH}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\-5\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-5)^2+0^2} = \sqrt{26}$$

$$\overline{EH} = \left|\overrightarrow{EH}\right| = \left|\begin{pmatrix}-5\\1\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-5)^2+1^2+0^2} = \sqrt{26}$$

Da alle Seitenlängen des Vierecks gleich sind, handelt es sich um eine Raute.
Um noch nachzuweisen, dass diese Raute ein Quadrat ist, berechnet man das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{EH}$:

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-5\\1\\0\end{pmatrix} = 1 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$

Da das Skalarprodukt der beiden Vektoren Null ergibt, ist bei E ein rechter Winkel und da das Viereck EFGH eine Raute ist, auch bei F, G und H.
Somit ist das Viereck EFGH ein Quadrat.
Die Ebene L, in der die Punkte E$(2 \mid -3 \mid 4)$, F$(3 \mid 2 \mid 4)$ und S$(0 \mid 0 \mid 5)$ liegen, hat beispielsweise den Stützpunkt E und die Spannvektoren $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{ES} = \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$. Damit hat L die Parametergleichung:

$$L\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}5\\3,9\\-1,3\end{pmatrix}\ ;\ s,t \in \mathbb{R}$$

Notiz-Rand

Einen Normalenvektor $\vec{n}$ von L erhält man mithilfe des Kreuzprodukts der Spannvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Alternativ kann man $\vec{n}$ auch mithilfe des Skalarprodukts bestimmen, da $\vec{n}$ auf beiden Spannvektoren senkrecht steht. Damit gilt:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

und

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Daraus ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llllllll} \text{I} & n_1 & + & 5 \cdot n_2 & + & 0 \cdot n_3 & = & 0 \\ \text{II} & -2 \cdot n_1 & + & 3 \cdot n_2 & + & n_3 & = & 0 \end{array}$$

Wählt man in Gleichung I z.B. $n_1 = 5$, erhält man: $5 + 5 \cdot n_2 = 0 \Rightarrow n_2 = -1$.
Setzt man $n_1 = 5$ und $n_2 = -1$ in Gleichung II ein, ergibt sich:

$$-2 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) + n_3 = 0 \Rightarrow n_3 = 13$$

Damit ergibt sich ein Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Eine Koordinatengleichung von L erhält man mithilfe der Punkt-Normalenform:

$$\begin{aligned} &\text{L}: (\vec{x} - \vec{e}) \cdot \vec{n} = 0 \\ &\text{L}: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix} = 0 \\ &\text{L}: (x_1 - 2) \cdot 5 + (x_2 + 3) \cdot (-1) + (x_3 - 4) \cdot 13 = 0 \\ &\text{L}: 5x_1 - 10 - x_2 - 3 + 13x_3 - 52 = 0 \\ &\text{L}: 5x_1 - x_2 + 13x_3 = 65 \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch die Koordinaten des Punktes $E\,(2 \mid -3 \mid 4)$ in den Ansatz $5x_1 - x_2 + 13x_3 = d$ einsetzen:

$$5 \cdot 2 - (-3) + 13 \cdot 4 = d \Rightarrow d = 65$$

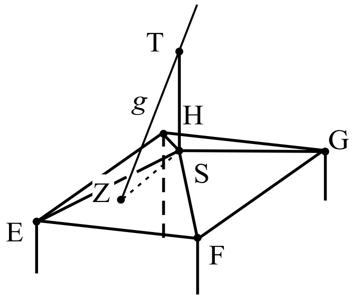
Die Ebene L hat somit die Koordinatengleichung $\text{L}:\ 5x_1 - x_2 + 13x_3 = 65$.

Notiz-Rand

b) Zuerst stellt man die Gerade g auf, die durch den Punkt T verläuft und den Richtungsvektor $\vec{v}$ hat:

$$g: \vec{x} = \vec{t} + s \cdot \vec{v}$$

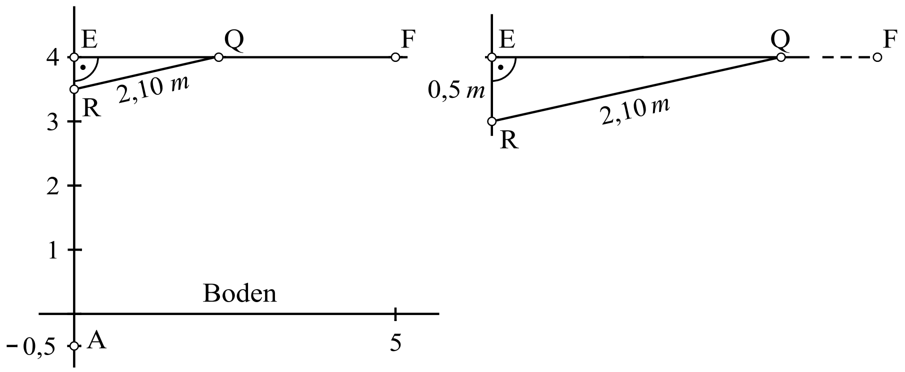
Anschließend berechnet man den Schnittpunkt Z der Geraden g mit der Ebene L, in der die Dachfläche EFS liegt.



Die Länge l des Schattens (in Metern) erhält man, indem man die Länge des Vektors von S zu Z bestimmt:

$$l = \left|\overrightarrow{SZ}\right|$$

c) Zur Veranschaulichung skizziert man die Problemstellung:



Der Balken wird beispielsweise im Punkt $R(2\,|\,-3\,|\,3,5)$ befestigt, also 0,5m unterhalb von E, und endet im Punkt Q auf der Strecke EF.
Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras ergibt sich:

$$\begin{aligned}\overline{EQ}^2 + \overline{ER}^2 &= \overline{RQ}^2\\ \overline{EQ}^2 + 0,5^2 &= 2,10^2\\ \overline{EQ}^2 &= 2,1^2 - 0,5^2\\ \overline{EQ} &= \sqrt{2,1^2 - 0,5^2}\\ \overline{EQ} &\approx 2,04\end{aligned}$$

Wegen $\overline{EF} = \left|\overrightarrow{EF}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+5^2+0^2} = \sqrt{26}$ hat die Strecke QF die Länge:

$$\overline{QF} = \overline{EF} - 2,04 = \sqrt{26} - 2,04 \approx 3,06$$

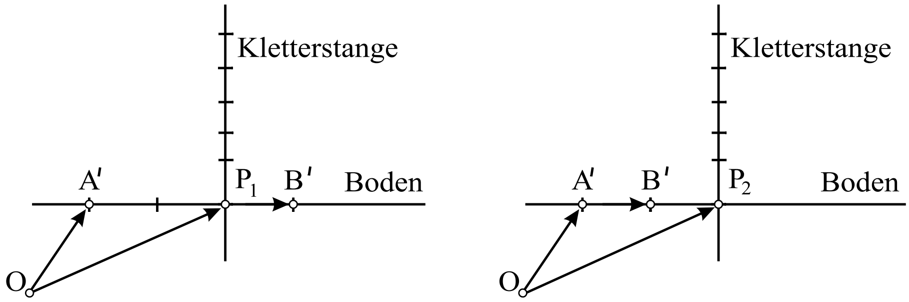
Notiz-Rand

Das Verhältnis v der Längen der beiden Streckenabschnitte erhält man, indem man die beiden Längen durcheinander teilt:

$$v = \frac{2,04}{3,06} = \frac{2}{3}$$

Das Verhältnis der beiden Abschnitte beträgt 2:3.

d) Zur Veranschaulichung skizziert man die Problemstellung. Es gibt zwei Möglichkeiten, wie der Punkt P liegen kann:



Der Punkt A′ liegt 0,5m oberhalb von A auf dem Boden, hat also die Koordinaten $A'(2 \mid -3 \mid 0)$, der Punkt B′ liegt 4m unterhalb von F auf dem Boden, hat also die Koordinaten $B'(3 \mid 2 \mid 0)$. Um die Punkte P_1 und P_2 so zu bestimmen, dass sie von A′ doppelt so weit entfernt sind wie von B′, kann man für jeden der beiden Fälle eine Vektorkette aufstellen:

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA'} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_1 \left(\frac{8}{3} \mid \frac{1}{3} \mid 0 \right)$$

$$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OA'} + 2 \cdot \overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_2 (4 \mid 7 \mid 0)$$

Damit ergeben sich für die zwei möglichen Positionen der Kletterstange die Koordinaten $P_1 \left(\frac{8}{3} \mid \frac{1}{3} \mid 0\right)$ und $P_2 (4 \mid 7 \mid 0)$.

Notiz-Rand

Analytische Geometrie B2

Gegeben sind die Punkte A$(6\,|\,1\,|\,0)$, B$(4\,|\,5\,|\,-4)$ und C$(-2\,|\,8\,|\,2)$.

a) Um zu zeigen, dass das Dreieck ABC bei B einen rechten Winkel hat, berechnet man das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\3\\6\end{pmatrix}=2\cdot(-6)+(-4)\cdot 3+4\cdot 6=0$$

Wegen $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ hat das Dreieck ABC bei B einen rechten Winkel.

Die Ebene E, in der die Punkte A$(6\,|\,1\,|\,0)$, B$(4\,|\,5\,|\,-4)$ und C$(-2\,|\,8\,|\,2)$ liegen, hat beispielsweise den Stützpunkt A und die Spannvektoren $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-8\\7\\2\end{pmatrix}$.

Damit hat E die Parametergleichung:

$$\text{E}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-8\\7\\2\end{pmatrix};\ s,t\in\mathbb{R}$$

Einen Normalenvektor $\vec{n}$ von E erhält man mit Hilfe des Kreuzprodukts (siehe Seite **??**) der Spannvektoren:

$$\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-8\\7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36\\36\\18\end{pmatrix}=18\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \vec{n}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

Alternativ kann man $\vec{n}$ auch mit Hilfe des Skalarprodukts bestimmen, da $\vec{n}$ auf beiden Spannvektoren senkrecht steht. Damit gilt:

$$\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}=0$$

und

$$\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-8\\7\\2\end{pmatrix}=0$$

Daraus ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcl}\text{I} & -2\cdot n_1 & + & 4\cdot n_2 & - & 4\cdot n_3 & = & 0\\ \text{II} & -8n_1 & + & 7\cdot n_2 & + & 2n_3 & = & 0\end{array}$$

Subtrahiert man Gleichung II vom 4-fachen von Gleichung I, ergibt sich: $9n_2-18n_3=0$.
Wählt man z.B. $n_3=1$, erhält man: $9n_2-18=0\ \Rightarrow\ n_2=2$.
Setzt man $n_3=1$ und $n_2=2$ in Gleichung I ein, erhält man:
$-2n_1+4\cdot 2-4\cdot 1=0\ \Rightarrow\ n_1=2$.

Damit ergibt sich ein Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$.

Eine Koordinatengleichung von E erhält man mit Hilfe der Punkt-Normalenform:

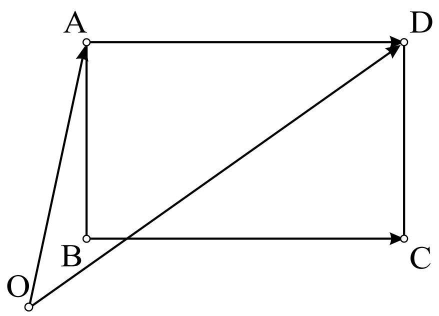
$$\begin{aligned}
&\text{E}\colon (\vec{x}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0\\
&\text{E}\colon \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=0\\
&\text{E}\colon (x_1-6)\cdot 2+(x_2-1)\cdot 2+(x_3-0)\cdot 1=0\\
&\text{E}\colon 2x_1-12+2x_2-2+x_3=0\\
&\text{E}\colon 2x_1+2x_2+x_3=14
\end{aligned}$$

Alternativ kann man auch die Koordinaten des Punktes A $(6\,|\,1\,|\,0)$ in den Ansatz $2x_1+2x_2+x_3=d$ einsetzen:

$$2\cdot 6+2\cdot 1+0=d \;\Rightarrow\; d=14$$

Die Ebene E hat somit die Koordinatengleichung E: $2x_1+2x_2+x_3=14$.

Um die Koordinaten eines Punktes D so zu bestimmen, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist, stellt man eine Vektorkette auf:



$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\6\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;\text{D}(0\,|\,4\,|\,6)$$

Der Punkt D hat die Koordinaten $\text{D}(0\,|\,4\,|\,6)$.

Den Flächeninhalt A des Rechtecks ABCD erhält man mit der Formel $\text{A}=a\cdot b$:

$$a=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-4)^2}=6$$

$$b=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\begin{pmatrix}-6\\3\\6\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-6)^2+3^2+6^2}=9$$

Damit erhält man:

$$\text{A}=a\cdot b=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|=6\cdot 9=54$$

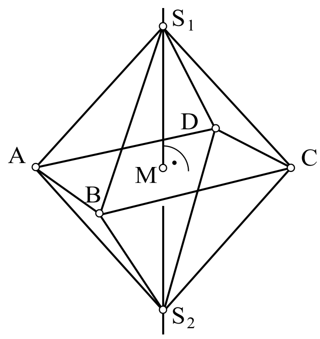
Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt 54 FE.

b) Da das Volumen der Pyramide 108 VE betragen soll, erhält man die Höhe h mit Hilfe der Formel $\mathrm{V} = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{G} \cdot h$:

$$\begin{aligned} \mathrm{V} &= \frac{1}{3} \cdot \mathrm{G} \cdot h \\ 108 &= \frac{1}{3} \cdot 54 \cdot h \\ 6 &= h \end{aligned}$$

Wählt man die Spitze S senkrecht über dem Mittelpunkt M des Rechtecks ABCD, so ergibt sich Folgendes:
Den Mittelpunkt M der senkrechten Pyramide mit der Grundfläche ABCD erhält man, indem man den Mittelpunkt von A und C bestimmt: $\mathrm{M}(2 \mid 4,5 \mid 1)$. Die Koordinaten der Spitze S einer solchen Pyramide erhält man mit Hilfe einer Vektorkette mit einem auf Länge 1 normierten Normalenvektor:

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}_{1,2}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \pm 6 \cdot \vec{n}_0 = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \pm 6 \cdot \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$$



Mit $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$ ergibt sich:

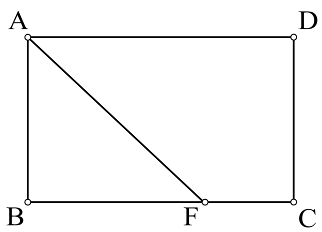
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}_1} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + 6 \cdot \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4,5 \\ 1 \end{pmatrix} + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4,5 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{S}_1\,(6 \mid 8,5 \mid 3)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}_2} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - 6 \cdot \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4,5 \\ 1 \end{pmatrix} - 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4,5 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{S}_2\,(-2 \mid 0,5 \mid -1)$$

Alternativ kann man auch die Spitze S_3 senkrecht über Punkt A wählen:

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}_3} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + 6 \cdot \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{S}_3\,(10 \mid 5 \mid 2)$$

c) Der Eckpunkt A des Rechtecks ABCD liegt in der x_1x_2-Ebene, der Eckpunkt B unterhalb und der Eckpunkt C oberhalb der x_1x_2-Ebene.



Den weiteren Eckpunkt F der Teilfläche des Rechtecks ABCD, die unterhalb der x_1x_2-Ebene liegt, erhält man, indem man die Gerade g durch B und C mit der x_1x_2-Ebene ($x_3 = 0$) schneidet:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Den Schnittpunkt F von g mit der x_1x_2-Ebene erhält man durch $x_3 = 0$:

$$-4 + 6t = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{2}{3}$$

Setzt man $t = \frac{2}{3}$ in g ein, ergibt sich:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathrm{F}(0\,|\,7\,|\,0)$$

Das Dreieck ABF liegt unterhalb der x_1x_2-Ebene und ist rechtwinklig bei Punkt B.
Den Flächeninhalt A des Dreiecks ABF erhält man mit Hilfe der Formel $\mathrm{A} = \frac{g \cdot h}{2}$.
Die Grundlinie g ist die Seite BF, die zugehörige Höhe h ist die Seite AB:

$$g = \left|\overrightarrow{\mathrm{BF}}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 4^2} = 6$$

$$h = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$$

Damit ergibt sich:

$$\mathrm{A} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$$

Der Flächeninhalt der Teilfläche, die unterhalb der x_1x_2-Ebene liegt, beträgt 18 FE.

Notiz-Rand

Stochastik C1

a) Für das Ereignis E_1: «Es sind mindestens sechs Lampen nicht defekt.» legt man X als Zufallsvariable für die Anzahl der nicht-defekten Lampen der Firma A fest. X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 10$ und $p = 1 - 0,09 = 0,91$.
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1 erhält man mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und der kumulierten Binomialverteilung:

$$P(E_1) = P(X \geqslant 6) = 1 - P(X \leqslant 5) \approx 1 - 0,0010 = 0,9990$$

frv.tv/ck

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1 beträgt etwa 99,9 %.

Für das Ereignis E_2: «Die Anzahl der defekten Lampen weicht vom Erwartungswert der Anzahl der defekten Lampen um höchstens 10 % ab.» legt man Y als Zufallsvariable für die Anzahl der defekten Lampen der Firma A fest. Y ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 500$ und $p = 0,09$. Den Erwartungswert von Y erhält man mit Hilfe der Formel für den Erwartungswert einer binomialten Zufallsvariablen:

$$E(Y) = \mu = n \cdot p = 500 \cdot 0,09 = 45$$

Anschließend berechnet man 10% vom Erwartungswert:

$$0,10 \cdot 45 = 4,5$$

Wenn die Anzahl der defekten Lampen vom Erwartungswert der Anzahl der defekten Lampen um höchstens 10 % abweichen soll, so müssen mindestens 41 und höchstens 49 Lampen defekt sein.
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_2 erhält man mit Hilfe der kumulierten Binomialverteilung:

$$P(E_2) = P(41 \leqslant Y \leqslant 49) = P(Y \leqslant 49) - P(Y \leqslant 40) \approx 0,7624 - 0,2443 = 0,5181$$

frv.tv/ck

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_2 beträgt etwa 51,8 %.

b) Wenn in einem Karton mit 30 Lampen sechs defekte Lampen enthalten sind, gibt es 24 nicht-defekte Lampen. Wenn der Händler zwei Lampen entnimmt, so handelt es sich um Ziehen ohne Zurücklegen. Der Händler nimmt den Karton an, wenn er bei jeder Entnahme eine nicht-defekte Lampe zieht. Die Wahrscheinlichkeit P_6 bei sechs defekten Lampen, dass der Händler den Karton annimmt, erhält man somit mit Hilfe der Pfadregeln:

$$P_6 = \frac{24}{30} \cdot \frac{23}{29} \approx 0,634$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Händler den Karton annimmt, beträgt etwa 63,4 %.
Um zu ermitteln, wie groß die Anzal der defekten Lampen in einem Karton höchstens sein darf, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler diesen Karton annimmt, mindestens 50% beträgt, bestimmt man durch Ausprobieren, indem man die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die Annahme des Kartons bei 7, 8 und 9 defekten Lampen berechnet:

$$P_7 = \frac{23}{30} \cdot \frac{22}{29} \approx 0,581$$
$$P_8 = \frac{22}{30} \cdot \frac{21}{29} \approx 0,531$$
$$P_9 = \frac{21}{30} \cdot \frac{20}{29} \approx 0,483$$

Somit dürfen in einem Karton höchstens 8 defekten Lampen sein.

Notiz-Rand

c) Eine intakte Lampe der Firma A erzielt einen Gewinn von 0,51 Euro, eine defekte einen Verlust von 0,98 Euro. Da der Discounter 35% der von ihm angebotenen Lampen von der Firma A bezieht und eine Lampe zu 91% intakt und zu 9% defekt ist, erhält man den zu erwartenden Gewinn des Discounters bei Lampen der Firma A, indem man die zu erwartenden Gewinne/Verluste mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten multipliziert und die Ergebnisse addiert:

$$\mathrm{E(A)} = 0{,}35 \cdot (0{,}51\,\mathrm{Euro} \cdot 0{,}91 + (-0{,}98\,\mathrm{Euro} \cdot 0{,}09)) \approx 0{,}13$$

Eine intakte Lampe der Firma B erzielt einen Gewinn von 0,47 Euro, eine defekte einen Verlust von 1,02 Euro. Da der Discounter 65% der von ihm angebotenen Lampen von der Firma B bezieht und eine Lampe zu 93% intakt und zu 7% defekt ist, erhält man den zu erwartenden Gewinn des Discounters bei Lampen der Firma B, indem man die zu erwartenden Gewinne/Verluste mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten multipliziert und die Ergebnisse addiert:

$$\mathrm{E(B)} = 0{,}65 \cdot (0{,}47\,\mathrm{Euro} \cdot 0{,}93 + (-1{,}02\,\mathrm{Euro} \cdot 0{,}07)) \approx 0{,}24\,\mathrm{Euro}$$

Den im Mittel pro Lampe zu erwartenden Gewinn G des Discounters erhält man, indem man die zu erwartenden Gewinne bei Lampen der Firmen A und B addiert:

$$\mathrm{G} = \mathrm{E(A)} + \mathrm{E(B)} = 0{,}13 + 0{,}24 = 0{,}37\,\mathrm{Euro}$$

Somit kann der Discounter mit einem mittleren Gewinn von 0,37 Euro pro Lampe rechnen.

Notiz-Rand

Stochastik C2

Die prozentualen Anteile von Haushalten unterschiedlicher Größe an der Gesamtzahl der Haushalte im Jahr 2013 in Deutschland sind durch folgende Tabelle gegeben:

1-Personen-Haushalte	40,5%
2-Personen-Haushalte	34,5%
3-Personen-Haushalte	12,5%
4-Personen-Haushalte	9,2%
Haushalte mit mindestens 5 Personen	3,3%

a) Für das Ereignis A: «Es wurden genau vierzig 1-Personen-Haushalte ausgewählt.» legt man X als Zufallsvariable für die Anzahl der 1-Personen-Haushalte fest. X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0,405$.
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A erhält man mit Hilfe der Binomialverteilung:

$$P(A) = P(X = 40) \approx 0,0808$$

frv.tv/ci

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A beträgt etwa $8,1\,\%$.
Für das Ereignis B: «Mindestens die Hälfte der ausgewählten Haushalte waren Mehrpersonenhaushalte.» legt man Y als Zufallsvariable für die Anzahl der Mehrpersonenhaushalte fest. Y ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und $p = 1 - 0,405 = 0,595$.
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B erhält man mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und der kumulierten Binomialverteilung:

$$P(B) = P(Y \geqslant 50) = 1 - P(Y \leqslant 49) \approx 1 - 0,0216 = 0,9784$$

frv.tv/ck

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B beträgt etwa $97,8\,\%$.
Das Ereignis C setzt sich aus zwei Teilereignissen C_1: «Unter den ersten zehn ausgewählten Haushalten war kein 4-Personen-Haushalt.» und C_2: «Unter den restlichen neunzig Haushalten waren höchstens fünf 4-Personen-Haushalte.» zusammen. Für das Ereignis C_1 legt man Z_1 als Zufallsvariable für die Anzahl der 4-Personen-Haushalte fest. Z_1 ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 10$ und $p = 0,092$.
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C_1 erhält man mit Hilfe der Binomialverteilung:

$$P(C_1) = P(Z_1 = 0) \approx 0,3809$$

frv.tv/ci

Für das Ereignis C_2 legt man Z_2 als Zufallsvariable für die Anzahl der 4-Personen-Haushalte fest. Z_2 ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 90$ und $p = 0,092$.
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C_2 erhält man mit Hilfe der kumulierten Binomialverteilung:

$$P(C_2) = P(Z_2 \leqslant 5) \approx 0,1541$$

frv.tv/ck

Da die beiden Ereignisse C_1 und C_2 unabhängig voneinander sind, erhält man die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C mit Hilfe der Pfadregeln:

$$P(C) = P(C_1) \cdot P(C_2) \approx 0,3809 \cdot 0,1541 \approx 0,0587$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C beträgt etwa $5,9\,\%$.

Notiz-Rand

frv.tv/cm

b) Legt man X als Zufallsvariable für die Anzahl der 2-Personen-Haushalte fest, so ist X binomialverteilt mit den Parametern $p = 0,345$ und unbekanntem n. Um zu bestimmen, wie viele Haushalte man im Jahr 2013 mindestens hätte zufällig auswählen müssen, damit darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mehr als zwanzig 2-Personen-Haushalte wären, löst man folgende Ungleichung mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses:

$$\begin{aligned} P(X > 20) &\geqslant 0,95\% \\ 1 - P(X \leqslant 20) &\geqslant 0,95 \\ 0,05 &\geqslant P(X \leqslant 20) \end{aligned}$$

Durch Ausprobieren ergibt sich:

$$\begin{aligned} n = 80: P(X \leqslant 20) &\approx 0,0449 \\ n = 79: P(X \leqslant 20) &\approx 0,0523 \end{aligned}$$

Somit hätte man mindestens 80 Haushalte auswählen müssen.

c) Um für das Jahr 2013 einen Näherungswert für die Gesamtzahl x der Haushalte in Deutschland zu bestimmen, geht man vereinfachend davon aus, dass in einem Haushalt mit mindestens 5 Personen genau 5 Personen leben. Die gegebenen Anteile von x kann man mit der jeweiligen Personenzahl pro Haushalt multiplizieren und die Ergebnisse addieren. Da im Jahr 2013 in Deutschland insgesamt etwa 80 Millionen Menschen lebten, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} 0,405 \cdot x \cdot 1 + 0,345 \cdot x \cdot 2 + 0,125 \cdot x \cdot 3 + 0,092 \cdot x \cdot 4 + 0,033 \cdot x \cdot 5 &= 80\,000\,000 \\ 2,003x &= 80\,000\,000 \\ x &\approx 40\,000\,000 \end{aligned}$$

Somit gab es im Jahr 2013 insgesamt etwa 40 Millionen Haushalte.

d) Legt man X als Zufallsvariable für die Anzahl der 1-Personen-Haushalte fest, so ist X binomialverteilt mit den Parametern $p = 0,405$ und $n = 500$.
Die Nullhypothese lautet: H_0: «Der tatsächliche Anteil der 1-Personen-Haushalte beträgt höchstens 40,5%.», also $H_0: p \leqslant 0,405$.
Die zugehörige Alternativhypothese lautet $H_1: p > 0,405$.
Wegen $H_1: p > 0,405$ handelt es sich um einen rechtsseitigen Test mit Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$.
Man wird die Nullhypothese verwerfen, wenn bei den 1-Personen-Haushalten deutlich mehr als 202 (Erwartungswert $E(X) = n \cdot p = 500 \cdot 0,405 = 202,5$) vorhanden sind.
Also ist ein minimales $k \in \mathbb{N}$ und damit ein Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{k, ..., 500\}$ der Nullhypothese so zu bestimmen, dass gilt:

$$\begin{aligned} P(X \in \overline{A}) &\leqslant \alpha \\ P(X \geqslant k) &\leqslant 0,05 \\ 1 - P(X \leqslant k-1) &\leqslant 0,05 \\ 0,95 &\leqslant P(X \leqslant k-1) \end{aligned}$$

Notiz-Rand

frv.tv/ck

Für $n = 500$ und $p = 0{,}405$ ergibt sich durch Ausprobieren mit Hilfe der kumulierten Binomialverteilung:

$$P(X \leqslant 220) \approx 0{,}9490$$
$$P(X \leqslant 221) \approx 0{,}9578$$

Also ist $k - 1 = 221 \;\Rightarrow\; k = 222$ das minimale $k \in \mathbb{N}$ und man erhält damit den Ablehnungsbereich:

$$\overline{A} = \{222, ..., 500\}$$

Damit ergibt sich folgende Entscheidungsregel:
Wenn bei 500 untersuchten Haushalten mindestens 222 1-Personen-Haushalte vorhanden sind, wird die Nullhypothese verworfen, d.h. der Anteil der 1-Personen-Haushalte hat sich vergrößert. Man irrt sich dabei mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 %.